



Institut Supérieur d'Informatique
de Modélisation et de leurs Applications

Campus des Cézeaux
BP 10125
63173 Aubière CEDEX

Rapport d'ingénieur
Projet de 2ème année
Filière F4 : Calcul Scientifique et Modélisation

Estimation de Caractéristiques du Second Ordre de Processus Stochastiques

Présenté par Noël MERIAUX et Lucas TORRENS
Proposé et encadré par M. Michel FOGLI

21 Mars 2012
Durée : 100 heures



Institut Supérieur d'Informatique
de Modélisation et de leurs Applications

Campus des Cézeaux
BP 10125
63173 Aubière CEDEX

Rapport d'ingénieur
Projet de 2ème année
Filière F4 : Calcul Scientifique et Modélisation

Estimation de Caractéristiques du Second Ordre de Processus Stochastiques

Présenté par Noël MERIAUX et Lucas TORRENS
Proposé et encadré par M. Michel FOGLI

21 Mars 2012
Durée : 100 heures

REMERCIEMENTS

Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à M. Michel FOGLI pour sa disponibilité au cours de l'année scolaire malgré ses obligations professionnelles, ainsi que son attention et la patience dont il a fait preuve.

Résumé

Les statistiques prévisionnelles exigent de traiter un vaste nombre de données par l’outil informatique. L’étude des caractéristiques du second ordre des processus stochastiques ne pouvant être réalisée de façon analytique, il s’avère nécessaire de développer et implémenter des algorithmes de calcul précis et efficaces. Nous nous attachons dans ce projet à manipuler les formules définissant ces grandeurs — à savoir l’espérance et les fonctions de corrélation et de densité des processus stochastiques — dans le but d’obtenir des expressions à la fois simples et optimisées. Pour ce faire, nous aurons besoin de calculer une transformée de Fourier discrète, lequel calcul est effectué grâce à l’algorithme de Cooley et Tukey disponible dans les fonctions du logiciel de calcul MATLAB. Cette opération est de plus utile pour mettre en lumière le lien entre les fonctions de corrélation et de densité d’un processus.

Mots-Clefs :

Processus Stochastiques du Second Ordre, Estimation de Caractéristiques, Transformée de Fourier Rapide, Espérance, Fonction de Corrélation, Fonction de Densité, MATLAB

Abstract

Prediction statistics require to treat a high amount of data by computers. Studying the second-order characteristics of stochastic processes cannot be realized in an analytic way, therefore it is necessary to develop and implement simple and efficient algorithms. We will focus in this project on manipulating the formulas defining the expectation and the correlation and density functions in order to reach simple and optimized expressions. To that end, we will need to calculate a discrete Fourier transform, calculation which will be carried out thanks to Cooley and Tukey’s algorithm available among the functions of MATLAB. Moreover, this operation is useful to highlight the link between the correlation and the density of a process.

Keywords :

Second-order Stochastic Processes, Estimation of Characteristics, Fast Fourier Transform, Expected Value, Correlation Function, Density Function, MATLAB

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	i
Résumé / Abstract	ii
Table des Matières	iii
Table des figures	iv
Introduction	1
1. Contexte et Hypothèses	2
2. Passage de la corrélation à la densité par TFR	4
2.1. Passage à la densité	4
2.2. Passage à la corrélation	8
2.3. Résultats	11
3. Estimation de caractéristiques du second ordre	16
3.1. L'espérance	16
3.2. La fonction de corrélation	17
3.3. La densité	18
3.4. Résultats	20
4. Retour sur la corrélation	23
4.1. Expression de l'estimateur	23
4.2. Formule numérique	23
4.3. Résultats	25
5. Conclusion	27
Annexes	I
Références	VI

TABLE DES FIGURES

Fig 2.1 Représentation des fonctions analytiques	11
Fig 2.2 Superposition des fonctions de densité	12
Fig 2.3 Différence des fonctions de densité	13
Fig 2.4 Grossissement des fonctions de densité	13
Fig 2.5 Superposition des fonctions de corrélation	14
Fig 2.6 Différence des fonctions de corrélation	14
Fig 2.7 Grossissement des fonctions de corrélation	15
Fig 3.1 Deux trajectoires du processus	21
Fig 3.2 Comparaison des corrélations	21
Fig 3.3 Comparaison des densités	22
Fig 3.4 Comparaison des estimations de la corrélation	25

INTRODUCTION

La caractérisation de processus aléatoires permet de modéliser des grandeurs dans bon nombre de domaines, depuis l'énergie en physique jusqu'aux fluctuations de marché en économie.

Au fil des années, ces domaines d'application ont exigé de traiter des quantités de valeurs grandissant jusqu'à dépasser les capacités humaines. C'est la raison pour laquelle le besoin s'est fait ressentir de faire appel à des procédures automatisées dans le but de réduire drastiquement les temps de calcul.

C'est dans ce contexte qu'intervient l'évaluation des caractéristiques de processus stochastiques, et plus particulièrement des caractéristiques du second ordre — espérance, fonctions de corrélation et de densité — des processus stochastiques du second ordre. Cette estimation soulève plusieurs difficultés attendant à la discrétisation des domaines d'études ou le passage de l'espace des temps à celui des pulsations dans le cadre de la densité.

Suite à ces observations, l'objectif qui s'impose naturellement à nous dans ce projet consiste à mettre en place des formules permettant d'estimer les grandeurs qui nous intéressent, ainsi qu'à vérifier leur efficacité par le biais d'une implémentation.

Dans cette optique, nous commencerons par manipuler les expressions liant directement la corrélation et la densité ; nous introduirons pour cela les séries de Fourier. Consécutivement, nous nous attacherons à travailler sur les définitions des trois grandeurs susnommées pour aboutir à l'estimation proprement dite. Nous terminerons alors par des jeux de tests de chacun des résultats ainsi obtenus.

1. CONTEXTE ET HYPOTHÈSES

Dans le cadre de cette étude, nous considérerons exclusivement le cas des processus stochastiques scalaires indexés par les réels positifs et définis sur un espace de probabilité $(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ arbitraire :

$$X : (t, a) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A} \longrightarrow X(t, a) \in \mathbb{R}$$

Nous ferons de plus l'hypothèse que ces processus sont du second ordre, continus et homogènes (ou stationnaires dans le cas présent) en moyenne d'ordre deux ainsi qu'ergodique par rapport à sa moyenne et ses fonctions de corrélation et de covariance, au sens des définitions suivantes :

- Du second ordre : le processus X sera qualifié *du second ordre* si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) \in L^2(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathbb{R})$$

Autrement dit : $\forall t \in \mathbb{R}, E(\|X\|^2) < +\infty$

- Continu en moyenne d'ordre deux : le processus X sera qualifié *continu en moyenne d'ordre deux* si et seulement si :

$$\forall (t) \in \mathbb{R}^2, \mathbb{E}(\|X(t') - X(t)\|^2) \xrightarrow[t \rightarrow t']{} 0$$

- Stationnaire en moyenne d'ordre deux : le processus X sera qualifié de *stationnaire en moyenne d'ordre deux* si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{E}(X(t)) &= m \\ \forall (t, t') \in \mathbb{R}^2, R_X(t, t') &= E(X(t)X(t')) = G(t - t') \end{aligned}$$

où $m \in \mathbb{R}$ est une constante et G une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

- Ergodique : le processus X sera qualifié d'*ergodique* si ses caractéristiques d'ensemble sont égales à ses caractéristiques temporelles.

Nous supposons avoir connaissance de L trajectoires (ou réalisations) indépendantes du processus X étudié, $L \in \mathbb{N}_+^*$.

Nous travaillerons sur un intervalle de temps discrétisé au moyen d'une partition en N intervalles ($N \in \mathbb{N}_+^*$), ce qui nous imposera de travailler à partir d'une matrice notée abusivement $X \in \mathcal{M}_{N \times L}$. Les colonnes de cette matrice correspondent aux trajectoires $a \in \mathcal{A} \rightarrow X(t, a)$ à t fixé du processus.

Les formules et expressions exposées dans la suite de cet ouvrage dérivent par ailleurs du contexte plus large des champs stochastiques vectoriels indexés sur \mathbb{R}^d dans lequel elles se généralisent.

2. PASSAGE DE LA CORRÉLATION À LA DENSITÉ PAR TFR

2.1. Passage à la densité.

L'expression de la densité spectrale S en tant que transformée de Fourier de la fonction de corrélation R est la suivante :

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} R(t)e^{-i\omega t} dt$$

Dans ce qui suit, nous allons exposer les calculs qui découlent de la discrétisation de cette intégrale dans le but de faire intervenir un algorithme de Transformée de Fourier discrète, la FFT (Fast Fourier Transformation, ou TFR en Français).

2.1.1. Discrétisation du domaine d'intégration.

Le domaine d'intégration sera un intervalle fermé $\bar{T} = [-T, T]$. L'intervalle de temps est ici symétrique, ce qui ne sera plus le cas dans les sections suivantes. Notons N une puissance entière positive de 2, et définissons un pas de temps Δt tel que

$$\Delta t = \frac{2T}{N}$$

Posons alors, pour $m \in \{1, 2, \dots, N\}$:

$$t_m = -T + (m - \frac{1}{2})\Delta t$$

A partir de ces temps, nous pouvons définir une partition de l'intervalle $\bar{T} = \bigcup_{1 \leq m \leq N} P_m$:

$$P_m = [t_m - \frac{\Delta t}{2}, t_m + \frac{\Delta t}{2}[, m \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$$

$$P_N = [t_N - \frac{\Delta t}{2}, t_N + \frac{\Delta t}{2}]$$

On subdivise ainsi l'intervalle \bar{T} en N intervalles P_m centrés à t_m et de longueur Δt .

2.1.2. Discrétisation associée du domaine spectral.

On note $\bar{\Omega} = [-\Omega, \Omega]$ l'intervalle de pulsations associées à l'ensemble des temps \bar{T} , où l'on connaît d'ores et déjà, par la règle de Shannon, que :

$$\Omega = \frac{\pi}{\Delta t} = \frac{\pi N}{2T}$$

A partir de là, ainsi que nous le fîmes pour les temps, définissons un pas fréquentiel $\Delta\omega$:

$$\Delta\omega = \frac{2\Omega}{N} = \frac{\pi}{T}$$

Posons ensuite les pulsations ω_k , pour $k \in \{1, 2, \dots, N\}$:

$$\omega_k = -\Omega + \left(k - \frac{1}{2}\right)\Delta\omega$$

A la suite de quoi nous pouvons définir une partition de $\bar{\Omega} = \bigcup_{1 \leq k \leq N} M_k$ comme suit :

$$M_k = \left[\omega_k - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_k + \frac{\Delta\omega}{2}[, \quad k \in \{1, 2, \dots, N-1\}\right.$$

$$M_N = \left[\omega_N - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_N + \frac{\Delta\omega}{2}\right]$$

2.1.3. Discrétisation de l'intégrale.

Rappelons que, connaissant la fonction de corrélation R , nous souhaitons calculer l'intégrale S suivante :

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{T}} R(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{1 \leq m \leq N} \int_{P_m} R(t) e^{-i\omega t} dt \\ &\simeq S^N(\omega) = \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{1 \leq m \leq N} R(t_m) e^{-i\omega t_m} \end{aligned}$$

Cette dernière assertion reposant sur l'approximation des intégrales sur P_m par le produit $\Delta t R(t_m)$ de la largeur de l'intervalle P_m par l'évaluation de R en son milieu. Il est donc nécessaire d'avoir un pas de temps assez petit pour que cette approximation soit assez précise, et donc choisir N égal à une puissance de 2 « assez grande ».

Or, $\forall (n, k) \in \{1, 2, \dots, N\}^2$:

$$\begin{aligned}
\omega_k t_m &= (-\Omega + (k - \frac{1}{2})\Delta\omega)(-T + (m - \frac{1}{2})\Delta t) \\
&= (-\frac{N\Delta\omega}{2} + (k - \frac{1}{2})\Delta\omega)(-\frac{N\Delta t}{2} + (m - \frac{1}{2})\Delta t) \\
&= (-\frac{N}{2} + k - \frac{1}{2})(-\frac{N}{2} + m - \frac{1}{2})\Delta\omega\Delta t \\
&= (k - \frac{N+1}{2})(m - \frac{N+1}{2})\frac{2\pi}{N} \quad (\text{règle de Shannon}) \\
&= \frac{2\pi}{N}(k - 1 + \frac{1-N}{2})(m - 1 + \frac{1-N}{2}) \\
&= \frac{2\pi}{N} \left((k-1)(m-1) + \frac{(m-1)(1-N)}{2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(k-1)(1-N)}{2} + \frac{(1-N)^2}{4} \right) \\
&= \frac{2\pi}{N} \left((k-1)(m-1) + \frac{(m-1)(1-N)}{2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(1-N)(2k-N-1)}{4} \right) \\
&= \frac{2\pi}{N}(k-1)(m-1) - \frac{\pi}{N}(m-1)(N-1) \\
&\quad - \frac{\pi}{2N}(N-1)(2k-N-1)
\end{aligned}$$

En reportant ce résultat dans l'expression de S^N obtenue précédemment, on obtient alors :

$$S^N(\omega_k) = \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{1 \leq m \leq N} R(t_m) e^{-\frac{2ik\pi(k-1)(m-1)}{N}} e^{\frac{i\pi(N-1)(m-1)}{N}} e^{\frac{i\pi(N-1)(2k-N-1)}{2N}}$$

Alors en posant :

$$\begin{aligned} D(k) &= \frac{\Delta t}{2\pi} e^{\frac{i\pi(N-1)(2k-N-1)}{2N}} \\ r(m) &= R(t_m) e^{i\pi \frac{(N-1)(m-1)}{N}} \\ s(k) &= \sum_{1 \leq m \leq N} r(m) e^{-2i\pi \frac{(k-1)(m-1)}{N}} \end{aligned}$$

On aboutit à l'expression suivante :

$$S^N(\omega_k) = D(k)s(k) , k \in \{1, 2, \dots, N\}$$

où $s(k)$ est ici de la forme idoine pour être calculée à partir des valeurs der par un algorithme de Transformée de Fourier Rapide. On usera pour cela de la fonction `fft` de MATLAB, laquelle implémente l'algorithme de Cooley et Tukey.

Nonobstant, les calculs sur machine — quelle que soit la machine et indépendamment de la puissance du logiciel de calcul — sont nécessairement approximatifs. Cela induit naturellement la subsistance, dans l'expression finale de $S^N(\omega_k)$, d'une partie imaginaire indésirable mais presque nulle. Pour palier à ce problème, nous prendrons donc la partie réelle de l'expression donnée plutôt, et poserons donc :

$$S^N(\omega_k) = \Re(D(k)s(k)) , k \in \{1, 2, \dots, N\}$$

2.2. Passage à la corrélation.

L'expression de la corrélation R en tant que transformée de Fourier inverse de la fonction de densité S est la suivante :

$$R(t) = \int_{\mathbb{R}} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

De façon similaire à ce que nous venons de faire pour la densité, nous allons réécrire cette expression sur un intervalle délimité et le discrétiser pour introduire un calcul aidé d'un algorithme de TFR.

2.2.1. Discrétisation du domaine d'intégration.

Le domaine d'intégration sera donc ici un intervalle fermé $\bar{\Omega} = [-\Omega, \Omega]$. Notant N une puissance entière de 2, nous pouvons définir un pas $\Delta\omega$ tel que

$$\Delta\omega = \frac{2\Omega}{N}$$

Posons alors, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\omega_k = -\Omega + \left(k - \frac{1}{2}\right)\Delta\omega$$

Comme précédemment, on définit alors une partition de l'intervalle $\bar{\Omega} = \bigcup_{1 \leq k \leq N} M_k$:

$$M_k = \left[\omega_k - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_k + \frac{\Delta\omega}{2}\right[, \quad k \in \{1, 2, \dots, N-1\}$$

$$M_N = \left[\omega_N - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_N + \frac{\Delta\omega}{2}\right]$$

On partitionne ainsi $\bar{\Omega}$ en N intervalles M_k centrés ès pulsations ω_k et de longueur $\Delta\omega$.

2.2.2. Discrétisation associée du domaine temporel.

On note encore $\bar{T} = [-T, T]$ l'intervalle temporel associé à l'ensemble des pulsations $\bar{\Omega}$, où l'on connaît toujours, grâce la règle de Shannon dont nous nous servîmes déjà, que :

$$T = \frac{\pi N}{2\Omega}$$

Définissons alors un dernier pas de temps Δt :

$$\Delta t = \frac{2T}{N} = \frac{\pi}{\Omega}$$

Posons ensuite, pour $m \in \{1, 2, \dots, N\}$ par :

$$t_m = -T + (m - \frac{1}{2})\Delta t$$

A la suite de quoi, nous définissons à nouveau une partition de $\bar{T} = \bigcup_{1 \leq m \leq N} P_m$ comme suit :

$$P_m = [t_m - \frac{\Delta t}{2}, t_m + \frac{\Delta t}{2}[, \quad m \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$$

$$P_N = [t_N - \frac{\Delta t}{2}, t_N + \frac{\Delta t}{2}]$$

2.2.3. Discrétisation de l'intégrale.

Rappelons que, connaissant la fonction de corrélation R , nous souhaitons calculer l'intégrale S suivante :

$$\begin{aligned} R(t) &= \int_{\bar{T}} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \sum_{1 \leq k \leq N} \int_{M_k} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &\simeq R^N(t) = \Delta t \sum_{1 \leq k \leq N} S(\omega_k) e^{i\omega_k t} \end{aligned}$$

En approximant comme pour la densité l'intégrale sur M_k par le produit $\Delta\omega S(\omega_k)$ de la largeur de l'intervalle M_k par l'évaluation de S en son milieu, requérant une nouvelle fois un N grand pour un pas de temps amenant à une précision adéquate sur cette approximation.

En recalculant ensuite $\omega_k t_m$ de la même manière que pour la densité, il vient :

$$\omega_k t_m = \frac{2\pi}{N}(k-1)(m-1) - \frac{\pi}{N}(k-1)(N-1) - \frac{\pi}{2N}(N-1)(2m-N-1)$$

D'où l'on obtient, en reportant dans l'expression de $R^N(t_m)$:

$$\begin{aligned} R^N(t_m) &= \Delta\omega \sum_{1 \leq k \leq N} S(\omega_k) e^{2i\pi \frac{(k-1)(m-1)}{N}} e^{-i\pi \frac{(N-1)(k-1)}{N}} e^{-i\frac{\pi}{2} \frac{(N-1)(2m-N-1)}{N}} \\ &= \Delta\omega e^{-i\frac{\pi}{2} \frac{(k-1)(m-1)}{N}} \sum_{1 \leq k \leq N} S(\omega_k) e^{-i\pi \frac{(N-1)(k-1)}{N}} e^{2i\pi \frac{(k-1)(m-1)}{N}} \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit plus simplement $R^N(t_m) = E(m)r(m)$, $m \in \{1, 2, \dots, N\}$ en posant :

$$\begin{aligned} E(m) &= \Delta\omega e^{-\frac{i\pi}{2} \frac{(N-1)(2m-N-1)}{2N}} \\ s(k) &= S(\omega_k) e^{-i\pi \frac{(N-1)(k-1)}{N}} \\ r(m) &= \sum_{1 \leq k \leq N} s(k) e^{2i\pi \frac{(k-1)(m-1)}{N}} \end{aligned}$$

où $r(m)$ a ici la forme adéquate — comme $s(k)$ tout à l'heure - pour être calculée à partir des valeurs des par un algorithme de Transformée de Fourier Rapide Inverse. On usera donc pour cela de la fonction *ifft* de MATLAB implémentant l'algorithme de Cooley et Tukey.

Le problème des impuretés complexes liées aux approximations des calculs pouvant subsister, on préférera comme tout à l'heure définir R^N comme étant la partie entière de l'expression donnée plus haut. Nous poserons donc :

$$R^N(t_m) = \Re(E(m)r(m)) , m \in \{1, 2, \dots, N\}$$

2.3. Résultats.

Dans ce qui suit, nous travaillerons sur l'exemple suivants :

$$(1) \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, R(t) = \frac{L^2}{4\omega_0^3 \xi_0} e^{-\omega_0 \xi_0 |t|} (\cos(\omega_d t) + \frac{\omega_0 \xi_0}{\omega_d} \sin(\omega_d |t|)) \\ \forall \omega \in \mathbb{R}, S(\omega) = \frac{L^2}{2\pi((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega_0^2 \xi_0^2 \omega^2)} \end{cases}$$

où $L = 1, 6\pi^{3/2}$, $\xi_0 = 10^{-2}$, $\omega_0 = 4\pi$ et $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \xi_0^2}$.

De plus, toutes les illustrations seront représentées dans le domaine positif des temps et fréquences, bien que les expressions théoriques donnassent des représentations symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Le tracé des fonctions de cet exemple a l'allure suivante, pour $N = 8192$ intervalles de subdivision du domaine d'étude $T = [-50, 50]$, et un pas de temps $\Delta t = 0.122$:

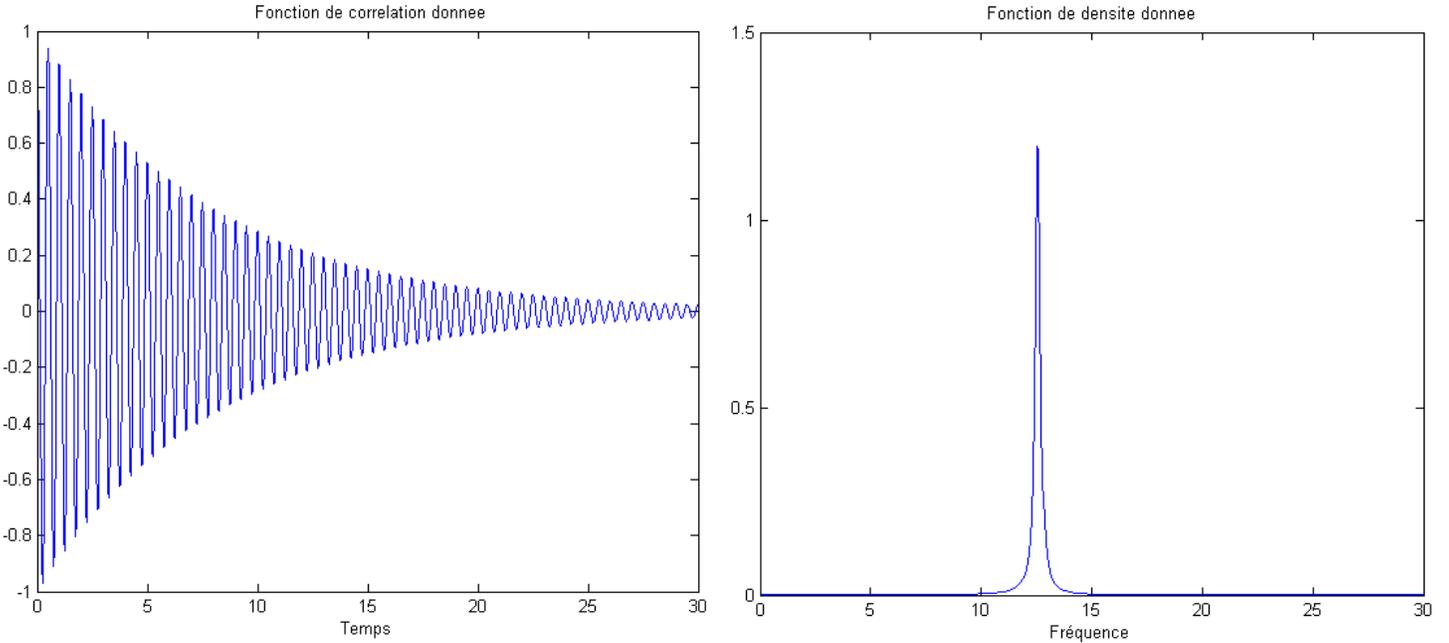


Fig. 2.1 : Représentation des fonctions analytiques

2.3.1. De la corrélation à la densité.

L'application des formules numériques décrites plus tôt pour ce passage fournit une figure hautement similaire à la précédente ; il est donc possible de les superposer :

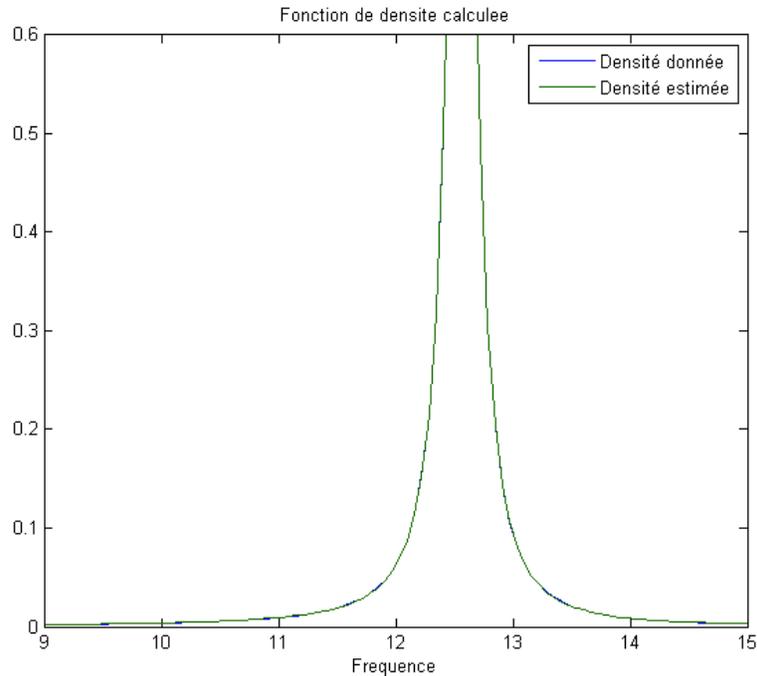


Fig. 2.2 : Superposition des fonctions de densité

La présence de quelques erreurs sur ce graphe nous amène à représenter la différence entre la fonction théorique et son estimée. Nous obtenons la figure suivante :

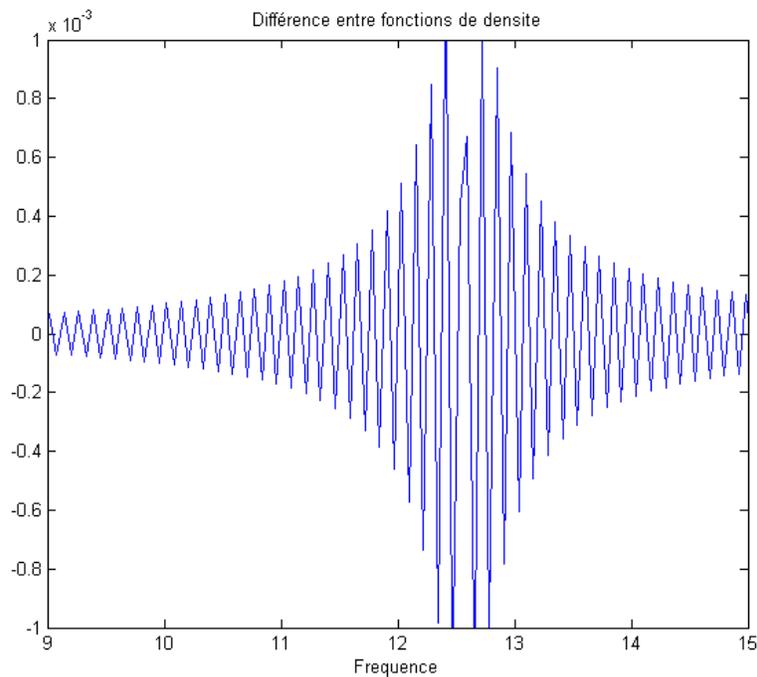


Fig. 2.3 : Différence des fonctions de densité

L'écart maximum mesuré sur cette différence vaut $1,21 \cdot 10^{-3}$, et une étude de l'erreur relative nous mène, sur un intervalle «pertinent» (l'intervalle correspondant au pic de la courbe), à une valeur ne dépassant pas les 3%.

Cela posé, on constate sur le graphe de la différence que les écarts maxima se concentrent précisément à l'endroit de ce pic. Pour expliquer la forte concordance entre les deux tracés, effectuons un grossissement autour des points de pente maximale. On observe le tracé suivant :

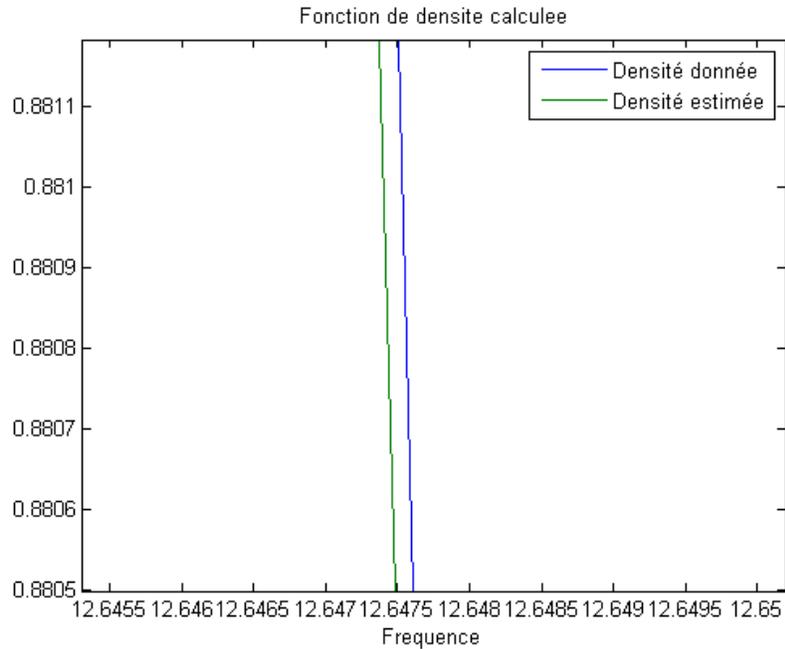


Fig. 2.4 : Grossissement des fonctions de densité

Ainsi, même si les courbes semblent très proches l'une de l'autre au sens de la distance, la différence des ordonnées pour une abscisse donnée sont notables. C'est pourtant cette erreur-là qui est la plus intéressante puisque ces modèles sont censés rechercher une bonne approximation de l'image par une fonction d'un point d'abscisse donnée.

2.3.2. De la densité à la corrélation.

Par la même démarche pour la transition densité-corrélation, il vient la superposition de courbes suivantes :

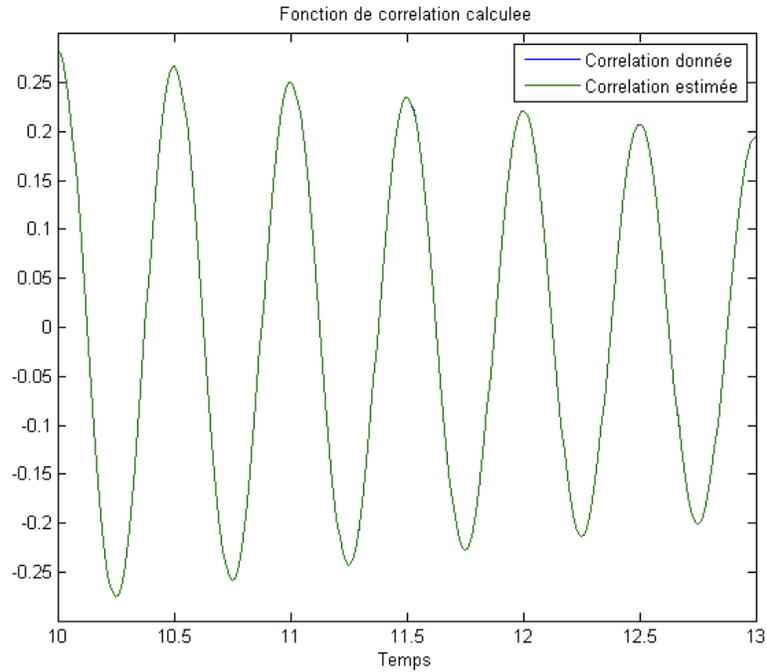


Fig. 2.5 : Superposition des fonctions de corrélation

Malgré l'absence d'erreurs visibles sur ce graphe, nous allons tout de même tracer la différence entre la fonction théorique et son estimée, après quoi l'on obtient :

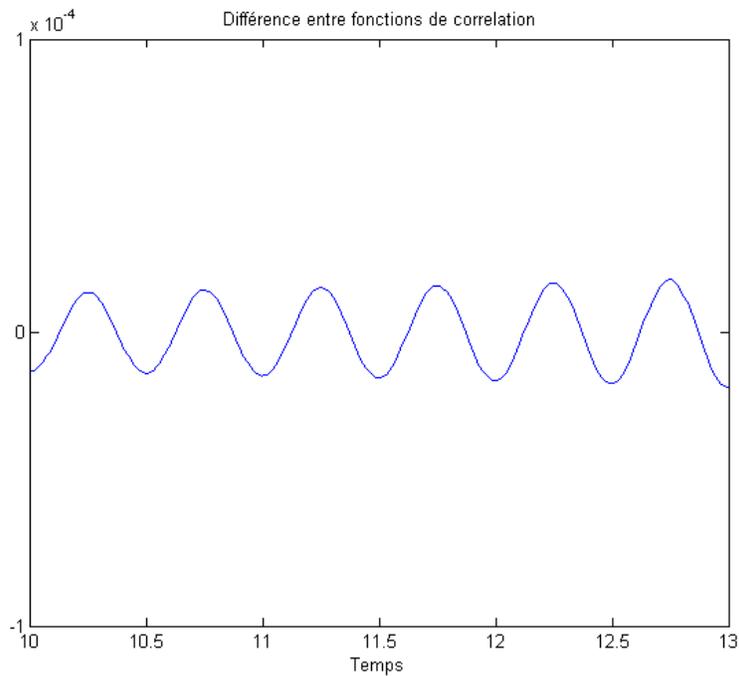


Fig. 2.6 : Différence des fonctions de corrélation

Sur l'intervalle $[-25, 25]$ (donc la moitié centrale du domaine d'étude), l'écart maximum n'excède pas $1,75 \cdot 10^{-5}$, malgré quelques effets de bords dus à la troncature du domaine d'acquisition qui mènent cette erreur à $1,86 \cdot 10^{-3}$. Nous pouvons le constater de visu sur la figure suivante :

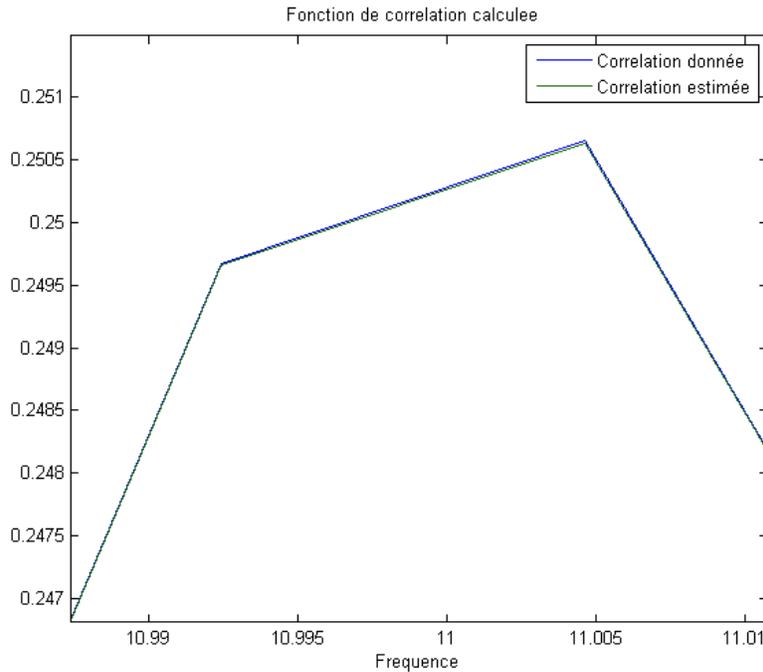


Fig. 2.7 : Grossissement des fonctions de corrélation au niveau d'un maximum local

Quant à l'erreur relative, celle-ci vaut au maximum 0.4% sur l'intervalle $[-25, 25]$, exception faite de quelques points critiques où la fonction de corrélation prend la valeur nulle. Nonobstant, elle s'accroît vivement en d'autres points critiques au voisinage des bords.

On remarque donc que les erreurs sont négligeables pour la plupart des domaines d'applications au vu de la précision des actuels instruments de mesure. Néanmoins, certains exigent des techniques bien plus pointues.

3. ESTIMATION DE CARACTÉRISTIQUES DU SECOND ORDRE

Dans cette partie, nous nous proposons de retrouver les fonctions de corrélation et de densité indépendamment l'une de l'autre par des estimateurs spécifiques.

Pour ce faire, prenons $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$ un processus aléatoire répondant aux hypothèses posées en première partie (cf p. 8). Les caractéristiques du second ordre sur lesquelles nous allons nous concentrer dans cette partie sont l'espérance μ_X , la corrélation R_X et la densité S_X définies par :

$$\begin{aligned}\mu_X &= \mathbb{E}(X(t)) \\ R_X(u) &= \mathbb{E}(X(t+u)X(t)) \\ S_X(u) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} R_X(t) e^{-i\omega t} dt\end{aligned}$$

Nous noterons de plus $\mathring{X} = X(t) - \mu_X$ le processus centré associé à X .

Le but de cette partie sera d'estimer les trois grandeurs précédentes sur un domaine d'acquisition $\bar{T} = [0, T]$, $T \in \mathbb{R}$ à l'aide de L trajectoires indépendantes de X ($L \in \mathbb{N}$) notées $X^{(l)}, l \in \{1, 2, \dots, L\}$.

On divisera pour cela \bar{T} en N intervalles D_m , avec $N \in \mathbb{N}$, $m \in \{1, 2, \dots, N\}$ et :

$$D_m = [t_m, t_{m+1}] = [(m-1)\Delta t, m\Delta t], \text{ où } \Delta t = \frac{T}{N}.$$

3.1. L'espérance.

3.1.1. Expression de l'estimateur.

L'estimateur de l'espérance μ_X de X s'écrit

$$\hat{\mu}_{X,L,T} = \frac{1}{L} \sum_{1 \leq l \leq L} \left(\frac{1}{T} \int_0^T X^{(l)}(t) dt \right)$$

Cette expression correspond à la moyenne et amène à un estimateur non biaisé et consistant de l'espérance, le biais étant l'espérance de la différence entre l'espérance de l'estimation et la valeur théorique ; la consistance se définissant par la convergence en probabilité de l'estimateur vers le résultat théorique, soit :

$$\forall \varepsilon > 0, P(\hat{\mu}_{X,L,T} - \mu_{X,L,T}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

3.1.2. Formule numérique.

L'obtention de la formule numérique est immédiate en usant de la formule des trapèzes décentrée à gauche appliquée à la subdivision de \bar{T} donnée plus haut. On obtient alors, $\forall a \in \mathcal{A}$:

$$\hat{\mu}_{X,L,T}(a) = \frac{1}{L} \sum_{1 \leq l \leq L} \left(\frac{1}{N} \sum_{1 \leq m \leq N} X^{(l)}(t_m, a) dt \right)$$

3.2. La fonction de corrélation.

3.2.1. Expression de l'estimateur.

Posons pour la suite :

$$T_0 = \frac{T}{2} \text{ et } \bar{T}_0 = [0, T_0].$$

L'estimateur s'écrit alors :

$$\hat{R}_{X,L,T}(u) = \frac{1}{L} \sum_{1 \leq l \leq L} \left(\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} X^{(l)}(t+u) X^{(l)}(t) dt \right), \quad u \in \bar{T}$$

3.2.2. Formule numérique.

Gardons toutes les notations précédentes, et notons de plus :

$$N_0 = \frac{N}{2}, \text{ en supposant } N \text{ pair.}$$

Le pas de temps $\Delta t = T_0/N_0 = T/N$ ne change pas, et la subdivision D_m de T_0 que l'on devrait alors définir ici coïncide sur T_0 avec celle que nous définîmes plus haut pour T .

Alors, usant du même procédé que pour la moyenne (i.e. la méthode des trapèzes décentrée à gauche appliquée à cette subdivision de T_0), nous obtenons, pour $m' \in \{1, 2, \dots, N+1\}$:

$$\hat{R}_{X,L,T}(u_{m'}, a) = \frac{1}{L} \sum_{1 \leq l \leq L} \left(\frac{1}{N_0} \sum_{1 \leq m \leq N} X^{(l)}(t_m + u_{m'}, a) X^{(l)}(t_m, a) \right)$$

où $u_{m'} = (m' - 1)\Delta t$.

3.3. La densité.

Il est d'abord nécessaire de rappeler qu'un processus homogène non centré n'admet pas de densité spectrale, et que c'est donc la densité de \hat{X} que nous allons ici estimer.

3.3.1. *Domaine spectral.*

On reprend ici les notations attenantes à l'intervalle \bar{T} et sa subdivision $D_m, m \in \{1, 2, \dots, N\}$, auxquels on associe un domaine spectral conformément à la règle de Shannon en posant :

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} &= [-\Omega_c, \Omega_c], \quad \Omega_c = \frac{\pi N}{T} = \frac{\pi}{\Delta t} \\ \Delta\omega &= \frac{2\Omega_c}{N} = \frac{2\pi}{T} \\ \omega_k &= -\Omega_c + \left(k - \frac{1}{2}\right)\Delta\omega = (2k - 1 - N)\Delta\omega \\ M_k &= \left[\omega_k - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_k + \frac{\Delta\omega}{2}\right] \end{aligned}$$

Pour éviter le phénomène de repliement de bande (introduction de fréquences indésirables dans un signal, généralement dû à l'échantillonnage que l'on en fait), on filtrera le processus \hat{X} par un filtre linéaire de convolution passe-bas de bande passante $\bar{\Omega}$ (la quasi-totalité de l'énergie de \hat{X} sera ainsi portée par $\bar{\Omega}$).

Pour ce faire, on pondère le processus par une fonction $W_{\bar{T}}$ de support \bar{T} que nous nommerons fenêtre temporelle. Ce sera ici le modèle de fenêtre de Hamming :

$$W_{\bar{T}}(t) = \frac{1,5863}{\sqrt{\bar{T}}} \left(0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi t}{\bar{T}}\right) \right) \mathbf{1}_{\bar{T}}(t)$$

3.3.2. Expression de l'estimateur.

L'estimateur de la densité du processus centré associé à X s'écrit :

$$\hat{S}_{X,L,T} = \frac{1}{L} \sum_{1 \leq l \leq L} |\hat{Z}^{(l)}(\omega)|^2, \quad \omega \in \bar{\Omega}$$

$$\text{avec } \hat{Z}^{(l)}(\omega) = \int_0^T W_{\bar{T}}(t) \hat{X}^{(l)}(t) e^{-i\omega t} dt$$

Cet estimateur est biaisé et non consistant, mais asymptotiquement sans biais pour $T \rightarrow +\infty$ — autrement dit, le biais en décroît pour $T \rightarrow +\infty$.

3.3.3. Formule numérique.

A partir de ce point, le raisonnement reste identique à celui suivi pour les estimateurs précédents, et c'est donc grâce à la méthode des trapèzes décentrée à gauche que l'on va obtenir la formule attendue. Il est toutefois nécessaire avant cela de détailler le calcul du produit $\omega_k t_m$ qui interviendra dans le calcul discrétisé, au niveau de l'exponentielle.

$$\begin{aligned} \omega_k t_m &= \left(-\Omega_c + \left(k - \frac{1}{2}\right)\Delta\omega\right)\left((m-1)\Delta t\right) \\ &= \left(-\frac{N\Delta\omega}{2} + \left(k - \frac{1}{2}\right)\Delta\omega\right)\left((m-1)\Delta t\right) \\ &= \left(-\frac{N}{2} + k - \frac{1}{2}\right)(m-1)\Delta\omega\Delta t \\ &= \left(k - \frac{N+1}{2}\right)(m-1)\frac{2\pi}{N} \quad (\text{règle de Shannon}) \\ &= \frac{2\pi}{N}\left(k-1 + \frac{1-N}{2}\right)(m-1) \end{aligned}$$

Posant alors :

$$z^{(l)}(m, a) = \Delta t W_{\overline{T}}(t_m) \hat{X}^{(l)}(t_m, a) e^{i\pi \frac{(m-1)(N-1)}{N}}$$

$$\hat{z}^{(l)}(k, a) = \sum_{1 \leq m \leq N} z^{(l)}(m, a) e^{-2i\pi \frac{(m-1)(k-1)}{N}}$$

Nous obtenons la formule finale :

$$\hat{S}_{X,L,T}(\omega_k, a) = \frac{1}{(2\pi)^d L} \sum_{1 \leq l \leq L} |\hat{z}^{(l)}(k, a)|^2$$

Dans ces expressions, nous remarquons de plus que $\hat{z}^{(l)}$ est de la forme idoine pour être calculé par le même algorithme de TFR (*fft* dans MATLAB) utilisé dans la première partie. Il faudra bien songer pour cela que N se doit alors d'être une puissance de 2.

3.4. Résultats.

Le processus ici étudié provient d'un fichier de valeurs scalaires organisées sous la forme d'une matrice de taille 8192×100 . Chaque ligne correspond à un temps d'acquisition particulier tandis que les colonnes représentent les trajectoires distinctes considérées. Le tracé des fonctions de cet exemple a l'allure suivante, pour $N = 8192$ intervalles de subdivision du domaine d'étude et un pas de temps $\Delta t = 0.0001$:

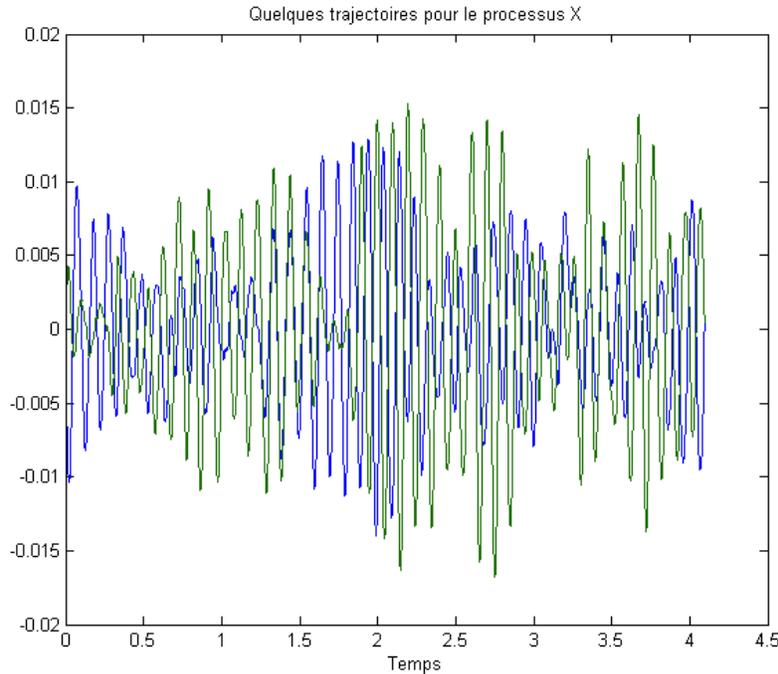


Fig. 3.1 : Deux trajectoires du processus

Les expressions théoriques des fonctions de corrélation et de densité sont les suivantes :

$$R_X(u) = \frac{e^{-\omega_G \xi_G |u|}}{4\omega_G^3 \xi_G} (\cos(\omega_d u) + \frac{\omega_G \xi_G}{\omega_d} \sin(\omega_d |u|))$$

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi((\omega_G^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_G^2 \omega_G^2 \omega^2)}$$

$$\text{où } \xi_G = 0,01, \omega_G = 20\pi, \text{ et } \omega_d = \omega_G \sqrt{1 - \xi_G^2}$$

3.4.1. La moyenne.

Pour le processus à traiter, l'estimation de la moyenne s'effectue par le calcul de la moyenne arithmétique des termes de la matrice, ce qui nous amène à $\hat{\mu}_{X,L,T} = -2,669 \cdot 10^{-5}$. On peut donc bien considérer que le processus est centré, ce qui est une condition nécessaire pour le calcul de la densité, comme mentionné plus tôt.

3.4.2. La corrélation.

Les résultats que nous obtînmes ici sont loin d'être satisfaisants, comme en témoignent les courbes suivantes :

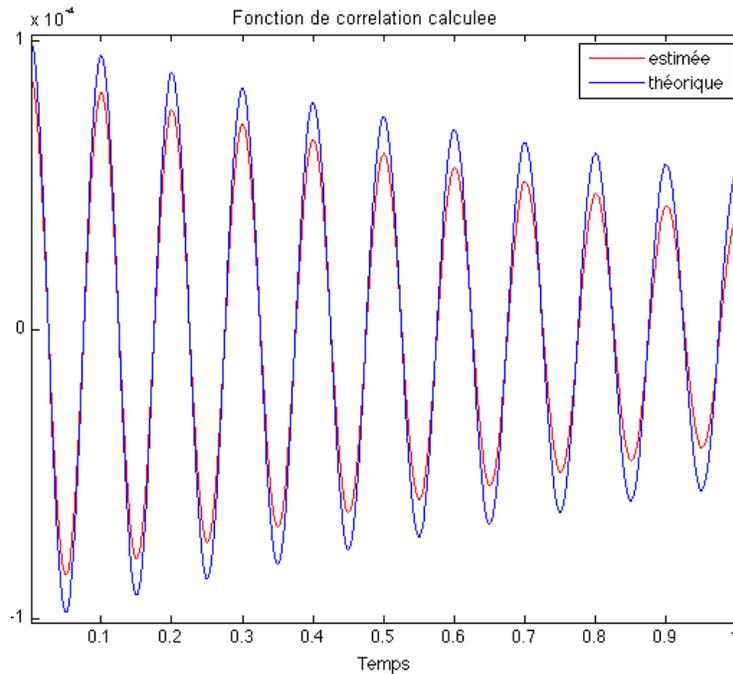


Fig. 3.2 : Comparaison des corrélations

Nous avons naturellement cherché la raison de ces différences en effectuant le calcul pour un point particulier, à savoir l'origine. D'une part, selon l'expression analytique, la valeur en ordonnée devrait être égale à la variance $\sigma_X^2 = \frac{1}{4\omega_G^3 \xi_G} = 1.01 \cdot 10^{-4}$. D'autre part, le calcul «à la main» de $R_X(0)$ consistant à prendre la moyenne sur les trajectoires de la moyenne sur les $N/2$ premiers temps des carrés des valeurs du processus donne bien $8,77 \cdot 10^{-5}$. Remarquons toutefois la similitude des formes des courbes tant au niveau de leur période que par l'évolution de leurs amplitudes.

Les trois interprétations possibles de ce résultat sont les suivantes :

- notre code comporte une erreur restée inaperçue
- le fichier de valeurs utilisé n'est pas conforme aux expressions analytiques
- le processus ne respecte pas toutes les conditions posées dans les postulats

Il ne semble guère possible de confirmer ou d'infirmar ce dernier point par manque d'informations sur le processus.

3.4.3. La densité.

Les fonctions de densité et de corrélation étant liées dans leurs expressions analytiques par des transformations de Fourier, il semble naturel de retrouver la même difficulté que dans le cas précédent, ce qui se confirme d'après le diagramme suivant :

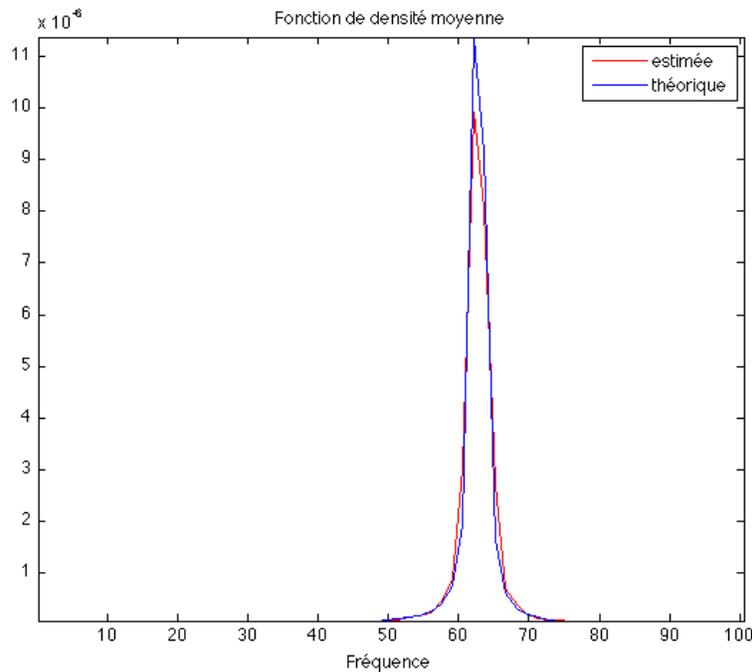


Fig. 3.3 : Comparaison des densités

Ces erreurs sont d'autant plus malheureuses que l'on préfère généralement se servir de ce dernier estimateur pour retrouver la corrélation, ce qui fera l'objet de la prochaine partie.

4. RETOUR SUR LA CORRÉLATION

L'on constate par expérience que l'estimation de la fonction de corrélation exposée en section 3.2 est souvent peu précise et qu'il vaut mieux commencer par estimer la moyenne et la densité pour l'en déduire. C'est ce que nous allons chercher à faire ici.

4.1. Expression de l'estimateur.

Dans un premier temps, on déduit des relations liant les différentes grandeurs étudiées l'égalité suivante :

$$R_X(u) = \int_{\mathcal{R}} S_{\hat{X}}(\omega) e^{i\omega u} d\omega + \mu_X^2$$

L'on en déduit l'expression de l'estimateur de R_X sous la forme suivante :

$$\hat{R}_{X,L,T}(u) = \int_{\bar{\Omega}} \hat{S}_{\hat{X},L,T}(\omega) e^{i\omega u} d\omega + \mu_{X,L,T}^2$$

4.2. Formule numérique.

Le point important dans cette dernière expression réside dans le calcul de l'intégrale, que nous noterons $\hat{I}_{X,L,T}(u)$ dans la suite. Pour mener ce calcul à bien, reprenons les définitions de $\bar{\Omega}$ et de sa subdivision $(M_k)_{k \in \{1,2,\dots,N\}}$ données dans la partie précédente, et posons :

$$\begin{aligned} \bar{U} &= [-U, U], \quad U = \frac{\pi N}{2\Omega} \\ \Delta u &= \frac{2U}{N} = \frac{\pi}{\Omega} \\ u_m &= -U + \left(m - \frac{1}{2}\right) \Delta u = (2m - 1 - N) \Delta u \\ P_m &= \left[u_m - \frac{\Delta u}{2}, u_m + \frac{\Delta u}{2}\right] \end{aligned}$$

discrétisation à partir de laquelle on obtient :

$$\hat{I}_{X,L,T}(u) = \Delta\omega \sum_{1 \leq k \leq N} \hat{S}_{X,L,T}(\omega_k) e^{\omega_k u_m}$$

Nonobstant, étant donnée la nature approximative intrinsèque à tout calcul mené par ordinateur, il peut s'avérer, lors de l'implémentation, qu'il subsiste une partie complexe non nulle dans la valeur de $\hat{I}_{X,L,T}$. Le résultat devant être réel, et ces résidus étant négligeables bien que gênants, nous préférons donc définir cette estimation comme la partie réelle de cette dernière expression.

Avant de conclure sur ce calcul, il sera nécessaire d'expliciter le produit $\omega_k u_m$:

$$\begin{aligned} \omega_k u_m &= (-\Omega_c + (k - \frac{1}{2})\Delta\omega)(-U + (m - \frac{1}{2})\Delta u) \\ &= (-\frac{N\Delta\omega}{2} + (k - \frac{1}{2})\Delta\omega)(-\frac{N\Delta u}{2} + (m - \frac{1}{2})\Delta u) \\ &= (-\frac{N}{2} + k - \frac{1}{2})(-\frac{N}{2} + m - \frac{1}{2})\Delta\omega\Delta u \\ &= (k - \frac{N+1}{2})(m - \frac{N+1}{2})\frac{2\pi}{N} \quad (\text{règle de Shannon}) \\ &= \frac{2\pi}{N}(k - 1 + \frac{1-N}{2})(m - 1 + \frac{1-N}{2}) \\ &= \frac{2\pi}{N} \left((k-1)(m-1) + \frac{(k-1)(1-N)}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(m-1)(1-N)}{2} + \frac{(1-N)^2}{4} \right) \\ &= \frac{2\pi}{N} \left((k-1)(m-1) + \frac{(k-1)(1-N)}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1-N)(2m-N-1)}{4} \right) \\ &= \frac{2\pi}{N}(k-1)(m-1) - \frac{\pi}{N}(k-1)(N-1) \\ &\quad - \frac{\pi}{2N}(N-1)(2m-N-1) \end{aligned}$$

Partant de cela, on peut poser :

$$\begin{aligned}\delta(m) &= \Delta\omega e^{-i\pi\frac{(N-1)(2m-1-N)}{2N}} \\ r_{LT}(k) &= \hat{S}_{X,L,T}(\omega_k) e^{-i\pi\frac{(N-1)(k-1)}{N}} \\ \hat{r}_{LT}(m) &= \sum_{1 \leq k \leq N} r_{LT}(k) e^{2i\pi\frac{(m-1)(k-1)}{N}}\end{aligned}$$

On peut alors enfin écrire :

$$\begin{aligned}\hat{I}_{LT}(m) &= \Re(\delta(m)\hat{r}_{LT}(m)) \\ \hat{R}_{X,L,T}(u_m) &= \Re(\Delta\omega\hat{r}_{LT}(m)) + \hat{\mu}_{X,L,T}^2\end{aligned}$$

4.3. Résultats.

Pour confirmer ou infirmer nos précédentes erreurs, nous avons choisi de faire ce calcul à partir de la densité théorique donné pour ce processus plutôt que de son estimée, ce qui nous mène au diagramme comparatif ci-dessous :

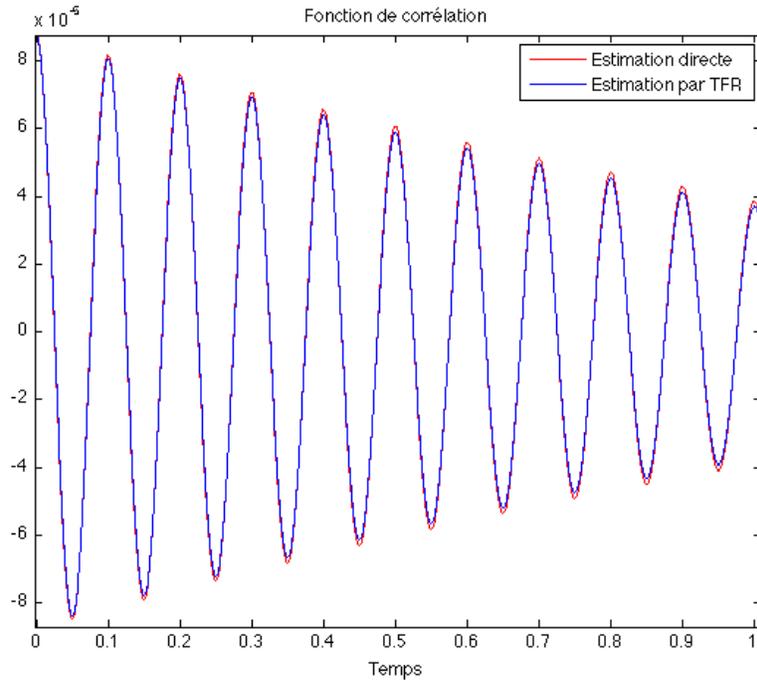


Fig. 3.4 : Comparaison des estimations de la corrélation

Les légères erreurs commises aux extrema locaux de la fonction sont naturelles puisque l'on compare ici deux méthodes approximatives de précision distincte. Toutefois, la forte similitude entre ces deux courbes, par opposition à leurs différences avec la corrélation théorique (Fig 3.2), nous amène à conjecturer que l'erreur se situe non dans le codage des estimateurs, mais :

- dans les expressions analytiques de R_X et S_X
- dans le code de R_X et S_X
- ou dans une non-concordance du fichier de données avec les expressions analytiques

5. CONCLUSION

Au travers de ce travail, nous avons analysé plusieurs méthodes d'obtention de caractéristiques statistiques de processus stochastiques pour lesquelles nous avons ou non besoin de connaître les fonctions de corrélation et de densité.

Dans un premier temps, nous avons utilisé de l'interdépendance entre ces fonctions, méthode dont les résultats furent amplement satisfaisants, étant donné qu'à l'échelle de représentation des courbes, l'œil demeurait incapable de déceler les erreurs entre théorie et estimation.

Dans un second temps, nous avons tenté de partir d'une connaissance minimale du processus ; c'est-à-dire un ensemble de valeurs correctement échantillonnées et stockées dans un fichier fourni. Mis à part un navrant échec lors de l'étude comparative de la fonction de corrélation, nos autres estimées concordaient entre elles.

Cela posé, on pourrait parfaitement envisager de poursuivre cette étude en l'étendant vers le contexte plus large des champs stochastiques à valeurs dans un espace vectoriel. Le codage inclurait alors des sommes imbriquées sur les nouvelles dimensions, et la représentation en deux dimensions ne serait alors plus pertinente.

ANNEXES

Annexe 1 : Code relatif à la partie 2

```
clear all ;
close all ;

%Notations pour la definition des fonctions R et S
L = 1.6*(pi^(3/2)) ;
w0 = 4*pi ;
xi0 = 0.01 ;
wd = w0*sqrt(1-(xi0^2)) ;

%Notations pour la discretisation
N = 8192 ;
T0 = 50 ;
Dt = 2*T0/N ;
W0 = pi*N/(2*T0) ;
Dw = pi/T0 ;
T = -T0:Dt:(T0-Dt) ;
T = T + (Dt/2)*ones(1,length(T)) ;
W = -W0:Dw:(W0-Dw) ;
W = W + (Dw/2)*ones(1,length(T)) ;
k=1:N ;

%Definition et tracé de la fonction R
R = ((L^2)/(4*(w0^3)*xi0))*exp(-w0*xi0*abs(T))...
    .*(cos(wd*T)+(w0*xi0*sin(wd*abs(T)))/wd) ;

%Definition et trace de la fonction S
DW2 = ((w0^2)*ones(1,length(W)) - (W.^2)).^2 ;
S = (L^2)./(2*pi*(DW2+4*(w0^2)*(xi0^2)*(W.^2))) ;

axis([0 20 0 1]) ;

%Calcul et trace de la fonction R avec un algorithme de fft
E = Dw*exp(-1i*pi*(N-1)*(2*k-N-1)/(2*N)) ;
s1 = S.*exp(-1i*pi*(N-1)*(k-1)/N) ;

r1 = N*ifft(s1) ;
R1 = real(E.*r1) ;

%Calcul et trace de la fonction S avec un algorithme de fft
```

```

D = Dt*exp(1i*pi*(N-1)*(2*k-N-1)/(2*N))/(2*pi) ;
r2 = R.*exp(1i*pi*(N-1)*(k-1)/N) ;
s2 = fft(r2) ;
S2 = real(D.*s2) ;

figure ;

%En bleu le tracé théorique, en rouge la corrélation calculée
subplot(2,1,1) ;
hold on
plot(T,R,'b') ;
plot(T,R1,'r') ;
axis([0 20 -1 1]) ;
hold off

%En bleu le tracé théorique, en rouge la densité calculée
subplot(2,1,2) ;
hold on
plot(W,S,'b') ;
plot(W,S2,'r') ;
axis([0 20 0 1.3]) ;
hold off

```

Annexe 2 : Code relatif aux parties 3 et 4

```
clear all ;
close all ;

%Notations pour la discretisation
N = 8192 ;
L = 100;
Dt = 5*10^-4;
T0 = N*Dt ;
T = 0:Dt:T0-Dt ;
W0 = pi*N/T0 ;
Dw = 2*pi/T0 ;
W = -W0+Dw/2:Dw:W0-Dw/2 ;
K=1:N ;
U0 = pi*N/(2*W0) ;
Du = pi/W0 ;
U = -U0+Du/2:Du:U0-Du/2 ;

%Chargement des données du processus
X = load('traj_proc');
X = X';

%Notations pour la definition des fonctions R et S
wg = 20*pi;
xig = 0.01;
wd = wg*sqrt(1-xig*xig);

%Expressions de la corrélation sur deux intervalles distincts
R0 = exp(-wg*xig*T(1:N/2+1)).*(cos(wd*T(1:N/2+1))+...
    wg*xig*sin(wd*T(1:N/2+1))/wd)/(4*wg*wg*wg*xig) ;
R1 = exp(-wg*xig*U).*(cos(wd*U)+wg*xig*sin(wd*abs(U))/wd)...
    /(4*wg*wg*wg*xig) ;

%Expression de la densité
S0 = 1 ./ (2*pi * ((wg*wg-W.*W).^2+4*xig*xig*wg*wg*W.*W));

%Estimateur de mu
mu = sum(sum(X)) / (N*L)

%Estimateur de R la fonction de corrélation
m = 1:(N/2) ;
R = zeros(N/2+1,1) ;
for k = 1:(N/2+1)
    R(k) = 2 * sum(sum(X(m+(k-1),:).*X(m,:))) / (N*L) ;
end
```

```

%Modèle de fenêtre de Hamming pour la densité
Ham = 1.5863*(0.54-0.46*cos(2*pi*T'/T0))/sqrt(T0);

%Estimateur de S la fonction de densité
X = X - mu ;
Z = zeros(N,L);
for m = 1:N
    Z(m,:) = Dt*Ham(m)*X(m,:)*exp(1i*pi*(m-1)*(N-1)/N);
end;

Zc = fft(Z);

S = zeros(N,1);
for k = 1:N
    S(k) = sum(Zc(k,:).*conj(Zc(k,:)))/(2*pi*L);
end;

%Retour à la corrélation depuis la densité
delta = Dw*exp(-1i*pi*(N-1)*(2*(1:N)-1-N)/(2*N)) ;
rLT = S0.*exp(-1i*pi*(N-1)*((1:N)-1)/N) ;
RLT = N*ifft(rLT) ;
ILT = real(delta.*RLT) ;
Rc = ILT + mu*mu ;

%Tracés
%Corrélations théorique et estimée
figure;
plot(T(1:(N/2+1)),R,'r') ;
hold on
plot(T(1:(N/2+1)),R0) ;
title('Fonction de corrélation') ;
legend('estimée','théorique') ;
xlabel('Temps') ;

%Densités théoriques et estimée
figure;
plot(W,S,'r') ;
hold on
plot(W,S0) ;
title('Fonction de densité') ;
legend('estimée','théorique') ;
xlabel('Fréquence') ;

%Corrélation Théorique et estimée par TFR
figure;

```

```
plot(U,Rc,'r') ;
hold on
plot(U,R1) ;
title('Fonction de corrélation') ;
legend('estimée par TFR','théorique') ;
xlabel('Temps') ;

%Corrélation estimées directement et par TFR
figure;
plot(T(1:N/2+1),R,'r') ;
hold on
plot(T(1:N/2+1),Rc(N/2:N)) ;
title('Fonction de corrélation') ;
legend('estimée directe','estimée par TFR') ;
xlabel('Temps') ;
```

RÉFÉRENCES

- [1] Michel FOGLI. *Quelques rappels de théorie des probabilités*. Polycopié de cours.
- [2] Michel FOGLI. *Filtrage linéaire des processus aléatoires*. Polycopié de cours.
- [3] Michel FOGLI. *Introduction à la théorie des probabilités, aux processus aléatoires et à leurs applications*. Polycopié de cours.
- [4] Michel FOGLI. *Modélisation aléatoire pour les sciences physiques, mécaniques et économiques*. Polycopié de cours.
- [5] Michel FOGLI. *Calcul par TFR des formules de Kintchine pour les champs aléatoires vectoriels homogènes*. Polycopié de cours, Décembre 2005
- [6] Michel FOGLI. *Estimation des caractéristiques du second ordre (moyenne, fonction de corrélation, densité spectrale) des processus et champs aléatoires vectoriels du second ordre, homogènes en moyenne d'ordre deux*. Polycopié de cours.